Шифр: С-21

Всероссийская олимпиада школьников
Региональный этап
по математике
2018/2019
Ленинградская область

Район Тихвинский

Школа МОУ „СОШ №9"

Класс 11

ФИО Куршев Евгений Олегович

1	2	3	4	5	Σ
7	7	1	0	X	15

①

Рассмотрим промежутки чисел, про которые говорили люди и номер фразы.

№чел.	1 фраза	2 фраза
1	$(1;+\infty)$	$(-\infty;1)$
2	$(2;+\infty)$	$(-\infty;2)$
3	$(3;+\infty)$	$(-\infty;3)$
4	$(4;+\infty)$	$(-\infty;4)$
5	$(5;+\infty)$	$(-\infty;5)$
6	$(6;+\infty)$	$(-\infty;6)$
7	$(7;+\infty)$	$(-\infty;7)$
8	$(8;+\infty)$	$(-\infty;8)$
9	$(9;+\infty)$	$(-\infty;9)$
10	$(10;+\infty)$	$(-\infty;10)$

Рассмотрим подчёркнутые множества: в первой фразе это $(9;+\infty)$ и $(10;+\infty)$. Т.к. числа целые, то эти множества и будут иметь пересечения с любыми множествами из ~~первой~~ второй фразы.
Во второй фразе это множества $(-\infty;1)$ и $(-\infty;2)$. Т.к. числа целые, то эти множества не будут иметь пересечения с любыми множествами из первой фразы.

Чтобы число рыцарей было наибольшим, нужно соединить подчёркнутые ~~эти~~ множества между собой и соединить остальные так, как показано выше.

Напишем пример для 8 рыцарей и 2 лжецов:

	N первой фразы	Число	N второй фразы
рыцарь 1	-	2	3
рыцарь 2	-	3	4
рыцарь 3	-	4	5
рыцарь 4	-	5	6
рыцарь 5	-	6	7
рыцарь 6	-	7	8
рыцарь 7	-	8	9
рыцарь 8	-	9	10
лжец 9	-	7	1
лжец 10	-	6	2

Отв: 8

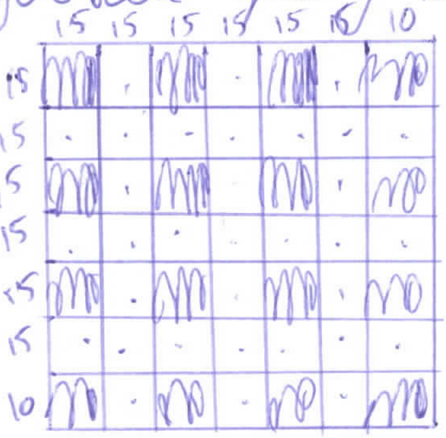
3

Расмотрим квадрат 15 на 15 полностью заполненный королями. Заметим, что если король стоит в т. $(X;Y)$, то он может попасть в т. $(X+k;Y+n)$, где k и n - цел. числа, такие, что

$0 \le |k|, |n| \le 15$

$|k|+|n| \geq 15$

Значит для квадрата 15x15 нужна „изоляция" в виде квадратов 15x15 имеющих с ним хотя бы одну общую точку. Разобьём доску как на рисунке:



„Изоляции" могут пересекаться между собой. Закрасим наибольшее число возможных квадратов 15x15. (см. рис)
Точки - это „изоляция"
Далее закрасим наибольшее число клеток 10 на 15 учитывая „изоляцию"

Осталась клетка 10 на 10. Т.к. она не попадает под „изоляцию" то её тоже можно закрасить.

$S = 15 \cdot 15 \cdot 9 + 10 \cdot 15 \cdot 6 + 10 \cdot 10 = 3025$ клеток.

Докажем, что больше не возможно. Возьмём короля и поставим его в любую свободную клетку. Т.к. эта клетка находится под изоляцией, то это неверно.

ч.т.д. Отв: 3025

6	7	8	9	10	Σ
7	7	x	2	0	16

⑥

Рассмотрим два случая:

1) последовательность начинается с чётного числа $2k$ $k>50$

2) последовательность начинается с нечётного числа $2k-1$ $k>50$

1) Последовательность имеет вид:

$2k,\ 2k+1,\ 2k+2,\ 2k+3.$

Возьмём 2, 3 и 4 числа последовательности. $S=2k+1+2k+2+2k+3=$ $=6k+6=2\cdot3\cdot(k+1)$. Т.к. $k>50$, то S можно представить в виде произведения 3 различных чисел. Пр: 110, 111, 112, 113

$S=111+112+113=336=2\cdot3\cdot56$

2) Последовательность имеет вид:

$2k-1,\ 2k,\ 2k+1,\ 2k+2$

Возьмём 1, 2, 3 числа последовательности. $S=2k-1+2k+2k+1=$ $=6k=2\cdot3\cdot k$. Т.к. $k>50$, то S можно представить в виде произведения 3 различных чисел. Пр: 101, 102, 103, 104

$S=101+102+103=306=2\cdot3\cdot51$

Ч.т.д.

⑦

$x_n=2^n\left(\sqrt[2^n]{a}-1\right)=$ $\quad a>0 \quad a\neq1$

$=2^n\left(a^{\frac{1}{2^n}}-1\right)$

$x_{n+1}=2^{n+1}\left(\sqrt[2^{n+1}]{a}-1\right)=2^{n+1}\left(a^{\frac{1}{2^{n+1}}}-1\right)=2^{n+1}\left(a^{\frac{1}{2^n\cdot2}}-1\right)=$

$=2^{n+1}\left(\left(a^{\frac{1}{2^n}}\right)^{\frac12}-1\right).$

Если $x_{n+1}-x_n<0$ при любом n, то после-

2) 0 - не является неотрицательным числом.

В данном случае делаем всё аналогично п. 1, только вместо нулей берем числа ~~от~~ очень маленькие, стремящиеся к 0, а вместо одинаковых дробей берём числа стремящиеся к $\frac{1}{n+1}$. Тогда максимальное произведение будет стремиться к $\frac{1}{(n+1)^2}$

Ответ: при правильной игре на доске останется число $\frac{1}{(n+1)^2}$ (или близкое к нему (п. 2))

9

Отв: 28.

Покажем, что учеников не более 29. Если их 30, то один из них ходил каждый день, тогда он не мог сказать, что он был в бассейне в какой-либо день. Если их было 29, то один человек не ходил ровно один день. Чтобы выполнялось условие, в этот день должны были прийти все остальные. Но в этот день пришёл тот, кто сходил в бассейн всего 1 раз. Но для него не будет выполняться условие, т.к. с другими он был в бассейне в один день, а отдельно нет.

Теперь докажем, что 28 возможно. Максимально возможное количество приходов в бассейн = $30N$, где N - число людей. Т.к. каждый хотя бы раз не приходил и число приходов различно то приходов в бассейн не больше $15N$. Если бы получилось так, что в классе было 30 чел, то приходов было бы не больше 450. Но т.к. в классе не может быть 30 чел, то нужно отнять от каждого человека по 1 приходу, тогда получается 420. Т.к. мы отнимали, то человек с 1 приходом не пришёл ни разу, а с максимальным приходом не существует, то получаем пару отбрасывания

$15N = 420 \quad N = 28 \quad$ ч.т.д.